Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MAV

Mathématiques - BTS, groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) **Page 3**

2. **Série de Fourier d'une fonction périodique paire** (10 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2023/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un meuble et le fond d'un tiroir est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie l'équation différentielle du mouvement, puis la fonction obtenue, le temps de fermeture et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. On résout donc séparément $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$. Les deux solutions réelles distinctes de l'équation caractéristique sont ainsi obtenues directement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1. b. À l'aide des solutions de l'équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

1. L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, -1 et -4.
2. D'après le tableau fourni, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines. Les constantes réelles restent arbitraires ici; les conditions initiales de la question suivante permettront de les déterminer pour la fonction f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction $f(t)$ représente la distance entre O et M, exprimée en centimètres. À $t = 0$, cette distance vaut 20 cm, donc $f(0) = 20$. La dérivée représente la vitesse de variation de cette distance. Comme le tiroir se rapproche de O à vitesse négative de -10 cm·s^{-1}, on a $f'(0) = -10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Deux secondes après le début de la fermeture, on remplace simplement t par 2 dans l'expression donnée. On obtient $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression exacte est en centimètres. Son évaluation donne environ $3{,}157$ cm; la distance entre les deux points reste donc positive à cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est juste, et justifier.**

On évalue la distance à l'instant 4 s avec la fonction donnée : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. Cette valeur est inférieure à $0{,}5$ cm, alors qu'à l'instant initial la distance vaut 20 cm. La fonction étant continue, le seuil de fermeture est atteint à un instant strictement antérieur à 4 s.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B

Question 1. a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0. Chaque terme de l'expression a une limite nulle, et la limite de leur différence est également nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1. b. **Déduire de la limite de f que sa courbe représentative C possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de la fonction en $+\infty$ est finie et vaut 0. Une courbe représentative dont l'ordonnée tend vers une valeur finie L admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ en $+\infty$. Ici, la courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

1. Pour le premier terme, la dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, donc la dérivée de $\frac{70}{3}e^{-t}$ est $-\frac{70}{3}e^{-t}$.
2. Pour le second terme, la dérivée de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$. Le signe négatif devant le coefficient $\frac{10}{3}$ donne alors $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. On admet que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur l'intervalle considéré, $f'(t) < 0$, donc f est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et la limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau de variations est donc :

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Recopier le tableau de l'algorithme, en ajoutant des lignes si nécessaire, et le compléter à partir de la ligne 36 jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième, et le résultat du test de la boucle.

Le programme augmente t de $0{,}1$ tant que $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs du tableau sont arrondies au centième; le test est effectué sur la valeur exacte de $f(t)$.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, lorsque $t = 3{,}9$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3{,}8$, le test est encore vrai puisque $f(3{,}8) \approx 0{,}52 > 0{,}5$. Le programme ajoute alors $0{,}1$ à t, puis teste à nouveau la condition. À $t = 3{,}9$, on a $f(3{,}9) \approx 0{,}47 < 0{,}5$; la boucle s'arrête et cette valeur de t est conservée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé, car $OM < 0{,}5$ cm.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $\int_0^4 f(t)\,dt = F(4) - F(0) = \frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}$. En appliquant la définition de la position moyenne, on divise cette intégrale par 4, ce qui donne l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

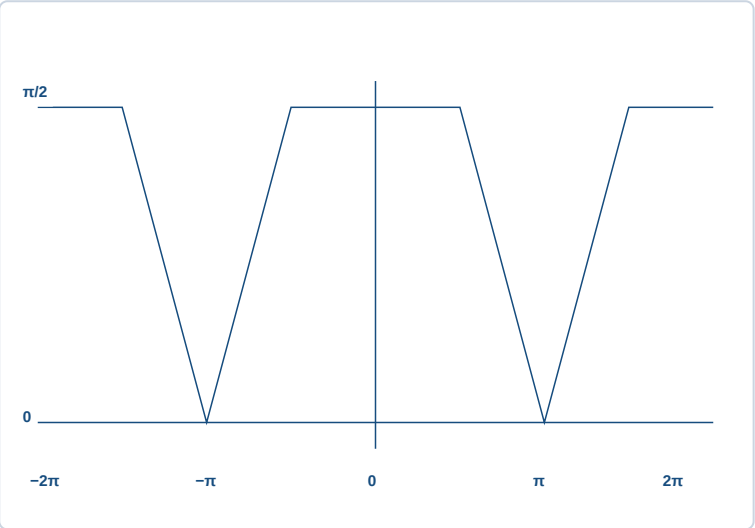
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur une demi-période. Il demande de tracer sa représentation, de déterminer ses coefficients de Fourier et d'utiliser une somme partielle pour évaluer l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux et sa périodicité.

Sur une période, **f(t)=π/2** pour 0≤t<π/2, puis **f(t)=π−t** pour π/2≤t≤π. On prolonge cette courbe par parité et par répétition de période 2π : les maxima forment des plateaux et les minima sont atteints en t=−π, 0? Non, les minima sont en t=±π et leurs translatés de période 2π.

Graphe de f sur [-2π, 2π]



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe paire et 2π-périodique : plateaux à π/2, minima nuls en t=±π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique [−π,π] est nulle. D'après la formule des coefficients de Fourier, **$b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$**, donc $b_n=0$ pour tout entier n≥1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour tout n≥1, **$b_n=0$**.

Question 3. On note ω la pulsation associée à la fonction f. Déterminer ω.

La pulsation est donnée par ω=2π/T. La période de f vaut T=2π ; ainsi, ω=2π/(2π)=1 rad·unité de temps^{-1}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega=1$.

Question 4. **Démontrer que $a_0 = 3\pi/8$.**

Le coefficient constant est $a_0=(1/\pi)\int_0^{\pi} f(t)dt$. Sur $[0,\pi/2]$, l'aire vaut $\pi^2/4$; sur $[\pi/2,\pi]$, elle vaut l'aire du triangle de base $\pi/2$ et de hauteur $\pi/2$, soit $\pi^2/8$. Donc $a_0=(\pi^2/4+\pi^2/8)/\pi=3\pi/8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0=3\pi/8$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.**

Pour une fonction paire de période 2π, le formulaire donne $a_n=(2/\pi)\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$. Sur $[0,\pi/2[$, $f(t)=\pi/2$; sur $[\pi/2,\pi]$, $f(t)=\pi-t$. En remplaçant ces deux expressions dans l'intégrale et en séparant les intervalles, on obtient l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n=\int_0^{(\pi/2)}\cos(nt)dt+(2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi}(\pi-t)\cos(nt)dt$.

Question 6. **On admet que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$. Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

Dans la formule admise, pour n=1, 2, 3, les différences de cosinus valent respectivement 1, −2 et 1. On obtient alors les trois coefficients exacts en appliquant le facteur $2/(\pi n^2)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1=2/\pi$, $a_2=-1/\pi$, $a_3=2/(9\pi)$.

Question 7. **En déduire que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

Comme les coefficients b_n sont nuls, la somme partielle $s_3(t)$ est $a_0+a_1\cos(t)+a_2\cos(2t)+a_3\cos(3t)$. En utilisant $a_0=3\pi/8$ et les trois coefficients déterminés à la question précédente, on retrouve l'expression demandée.

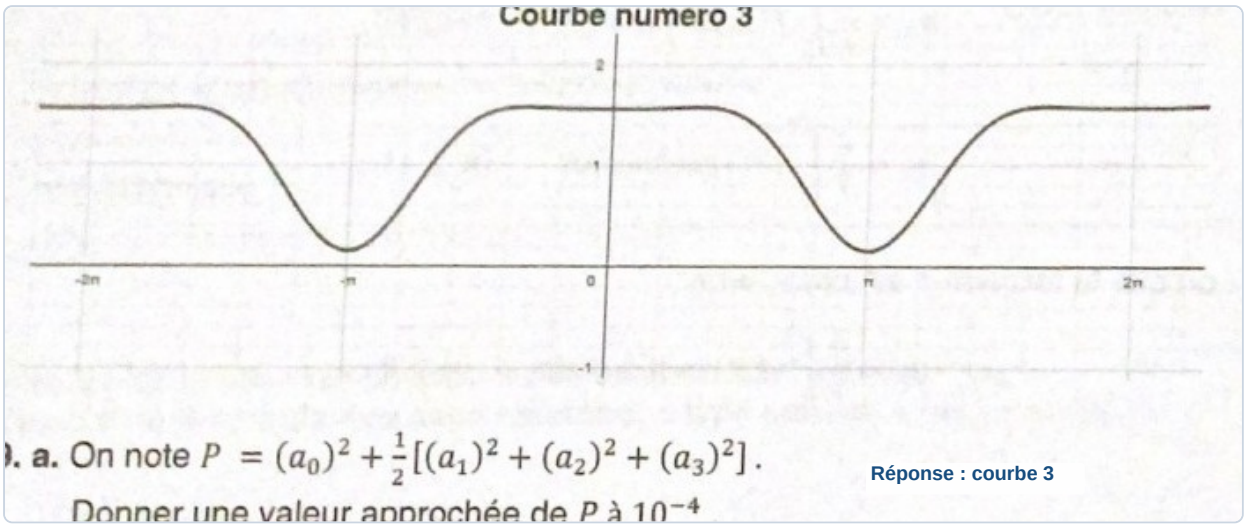
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t)=3\pi/8+(2/\pi)\cos(t)-(1/\pi)\cos(2t)+(2/(9\pi))\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.**

La somme partielle s_3 correspond à une courbe périodique et lisse. Sur le dessin, ses minima restent au-dessus de l'axe des abscisses ; cela correspond à la courbe numéro 3.

Courbe associée à s_3



Réponse : courbe 3

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9. a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

Avec les coefficients précédents, $P=(3\pi/8)^2+(1/2)[(2/\pi)^2+(-1/\pi)^2+(2/(9\pi))^2]$. En simplifiant, $P=9\pi^2/64+409/(162\pi^2)$, soit 1,6437 à 10^{-4} près.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. **On note F la valeur efficace de f et l'on admet que $F^2 = \pi^2/6$. Sachant que P constitue une approximation de F^2, déterminer le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

La valeur exacte est $F^2=\pi^2/6\approx1{,}6449$. La comparaison avec $P\approx1{,}6437$ donne une erreur relative d'environ 0,074 % ; parmi les choix proposés, cela correspond à 0,1 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Les deux exercices de 10 points portent sur la fermeture d'un tiroir modélisée par une équation différentielle et sur les séries de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent les exponentielles de la solution générale.
- La valeur moyenne de f sur [0 ; 4] est $m = (1/4)\int_0^4 f(t)dt$.
- Pour une fonction paire, tous les coefficients sinus b_n de sa série de Fourier sont nuls.
- Pour une fonction paire de période T, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$, pour $n \geq 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales de distance et de vitesse pour déterminer les constantes de la solution différentielle.
- Dans l'algorithme, vérifier à chaque étape le test strict $f(t) > 0,5$ et repérer le premier test faux.
- Pour les séries de Fourier, exploiter la période et la parité avant de calculer les coefficients.
- Distinguer P, approximation de F^2, de F, et calculer le pourcentage d'erreur sur F^2.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la fermeture du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale formée de deux exponentielles. Les valeurs de f(0) et f'(0) permettent ensuite de déterminer leurs coefficients.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction étudiée est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Par conséquent, tous les coefficients b_n de la série de Fourier sont nuls.

Q : Comment suivre l'algorithme qui recherche le temps de fermeture ?

On part de t = 0, puis on augmente t de 0,1 tant que f(t) est strictement supérieure à 0,5. La boucle s'arrête au premier test faux. Cette valeur de t indique le premier pas auquel le critère de fermeture est satisfait.

Q : Quelles exigences de présentation et de notation faut-il respecter ?

Chaque exercice vaut 10 points. Il faut justifier les démonstrations et les conclusions demandées, effectuer le tracé sur le document-réponse et, pour le choix multiple final, recopier une seule réponse. Le sujet ne fournit pas de détail de points par question.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2023/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Metiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.