Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (14 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités et intervalle de confiance dans un magasin de vélos** (10 questions) — **Page 8**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2023/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir qui se referme et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps. L'exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses limites et variations, un algorithme et un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. L'équation admet donc deux racines réelles distinctes : $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On obtient -1 et -4. La factorisation $r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4)$ confirme ces deux solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux solutions de l'équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les racines sont -1 et -4. D'après le tableau fourni, deux racines réelles distinctes donnent une solution générale formée d'une combinaison des exponentielles correspondantes. Les constantes sont réelles et arbitraires à ce stade, car les conditions initiales ne sont pas encore appliquées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. Sachant qu'à l'instant t = 0 le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O avec une vitesse de -10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut 20 cm, donc $f(0) = 20$. La vitesse est la dérivée de cette distance par rapport au temps. Comme le point M se rapproche de O dans le sens indiqué avec une vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, on a directement $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les conditions initiales sont $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression admise. Ainsi, $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression donne la distance exacte en centimètres. On conserve les exponentielles sans arrondir leurs valeurs, puisque la question demande le résultat exact.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après deux secondes, la distance exacte OM est $\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 3. Le tiroir est considéré comme fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.

Pour $t \geq 0$, on a $e^{-4t} \leq e^{-t}$, donc $40e^{-4t} < 70e^{-t}$ et $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t} < 0$. La distance décroît. À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, ce qui est inférieur à 0,5 cm. Le seuil a donc été franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : la distance décroît et vaut environ 0,427 cm à 4 secondes, donc le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. Sachant que lim e^{-u} = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer lim f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t \to +\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$, donc les deux exponentielles tendent vers 0. Chaque terme de l'expression de $f(t)$ tend ainsi vers 0, et leur différence tend également vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 0.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

On a établi que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Lorsqu'une fonction tend vers une valeur réelle L à l'infini, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, cette limite est nulle : l'asymptote est donc l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe est l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. La dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, tandis que celle de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$, par dérivation de l'exponentielle composée. Comme le second terme est soustrait, sa dérivée contribue positivement :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, puis la fonction tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Elle ne prend pas cette limite pour un temps fini.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

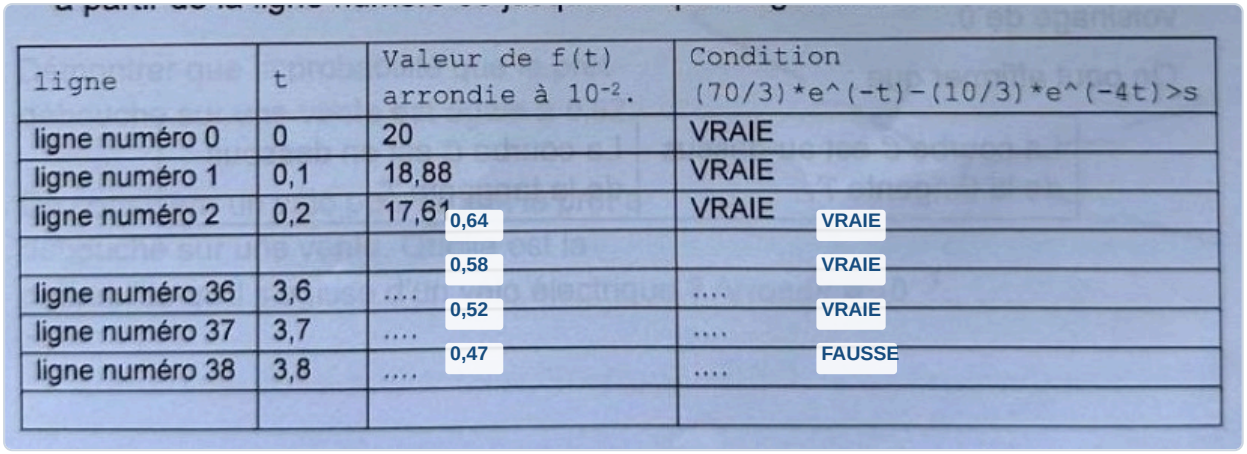
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire et en poursuivant jusqu'à l'arrêt. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies à 10^{-2}, ainsi que la valeur de vérité de la condition à chaque ligne.**

À chaque passage, la variable t augmente de 0,1 et la condition teste si $f(t) > 0,5$. Les valeurs de $f(t)$ sont arrondies au centième. La boucle continue aux lignes 36 à 38, puis s'arrête à la ligne 39 lorsque la condition devient fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
		0,64	VRAIE
		0,58	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	 0,52	.... VRAIE
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	 0,47	.... FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Lignes 36 à 39 : 0,64 (VRAIE), 0,58 (VRAIE), 0,52 (VRAIE), puis 0,47 (FAUSSE).

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle augmente t de 0,1 tant que $f(t) > 0,5$. À $t = 3,8$, la valeur vaut environ 0,52 : la condition est encore vraie. À l'itération suivante, $t = 3,9$ et $f(t) \approx 0,47$, donc la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. La distance OM est alors inférieure au seuil de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La variable prend la valeur $t = 3,9$ s : le tiroir se trouve alors à moins de 0,5 cm du meuble.

Question 4.a. À partir du développement limité fourni, déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Le développement limité fourni est $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + o(t^2)$. Le terme constant donne $f(0) = 20$, et le coefficient de t donne $f'(0) = -10$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Le terme en t^2 n'intervient pas dans l'équation de la tangente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité affiché sur le sujet donne la partie régulière $20 - 10t - 15t^2$. À l'ordre deux, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc retenir la proposition qui ajoute ce reste à la partie régulière, et non un reste simplement noté $\varepsilon(t)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse exacte : $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 4.c. **Choisir l'affirmation exacte sur la position de la courbe de f par rapport à sa tangente T au voisinage de 0 : la courbe est au-dessus ou en dessous de T. Aucune justification n'est demandée.**

La tangente trouvée précédemment est $T(t) = 20 - 10t$. Le développement limité donne alors $f(t) - T(t) = -15t^2 + o(t^2)$. Au voisinage de 0, le terme dominant est $-15t^2$, négatif pour $t \neq 0$. La différence entre la fonction et sa tangente est donc négative près de 0, ce qui situe la courbe en dessous de la tangente.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au voisinage de 0, la courbe représentative de f est en dessous de sa tangente T.

2. Probabilités et intervalle de confiance dans un magasin de vélos

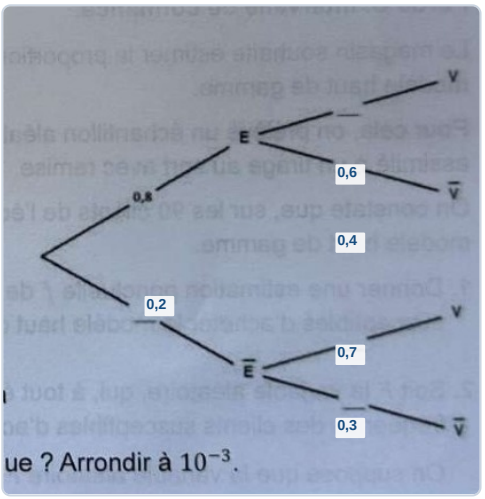
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques et souhaite étudier la fréquence des ventes qui suivent ces prêts. L'exercice aborde aussi la durée de réparation de vélos et l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté, puis l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

La première séparation distingue le vélo électrique **E** du vélo mécanique $\overline{E}$. Les probabilités sont respectivement 0,8 et 0,2. Depuis chaque type, on sépare les issues vente **V** et absence de vente $\overline{V}$. Les probabilités conditionnelles de vente sont 0,6 et 0,7 ; celles d'absence de vente se déduisent par complément à 1. Le visuel complète les branches de l'arbre.

Arbre pondéré complété



ue ? Arrondir à 10^{-3}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : 0,8 ; 0,2 ; 0,6 ; 0,4 ; 0,7 ; 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V) que le vélo soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

Sur l'arbre, l'événement « vélo électrique et vente » correspond au chemin qui passe d'abord par **E**, puis par **V**. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité de choisir un vélo électrique par celle d'obtenir une vente sachant que le vélo est électrique. Ainsi, $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0{,}48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut suivre un prêt de vélo électrique ou un prêt de vélo mécanique. Ces deux chemins sont incompatibles ; on additionne donc leurs probabilités. La formule des probabilités totales donne $P(V) = P(E)P_E(V) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(V)$. En utilisant les probabilités indiquées dans l'énoncé : $P(V) = 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0{,}62$.

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique et arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité qu'un vélo vendu ait été électrique. On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle : $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Les résultats précédents donnent $P_V(E) = \dfrac{0{,}48}{0{,}62} \approx 0{,}7741935$. L'arrondi au millième demandé est donc 0,774.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0{,}774$.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **La variable aléatoire X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.**

Chaque vélo réparé correspond à un essai, et l'événement compté est « la réparation nécessite moins d'une heure ». Sa probabilité est identique pour chaque vélo et vaut 0,62. L'échantillon contient 80 vélos ; la variable qui compte le nombre de réalisations de cet événement suit donc une loi binomiale de paramètres le nombre d'essais 80 et la probabilité de succès 0,62.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0{,}62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40) et arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure s'écrit $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0{,}62)^{40}(1 - 0{,}62)^{40}$. Avec $\binom{80}{40} = 1075072087333361764616 20$, on obtient environ 0,00829. Après arrondi au millième, la probabilité vaut 0,008.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 40) \approx 0{,}008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Dans le modèle binomial de l'exercice, les 80 réparations se répartissent entre moins d'une heure et plus d'une heure. Si X réparations prennent moins d'une heure, les autres sont au nombre de $80 - X$. La condition demandée est donc $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$. On calcule alors $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40)$, ce qui donne environ 0,981 après arrondi au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X \geq 41) \approx 0{,}981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 90 clients de l'échantillon, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. Donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On calcule donc $f = \dfrac{54}{90} = 0{,}6$. Cette fréquence observée, équivalente à 60 %, constitue l'estimation ponctuelle demandée de la proportion p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0{,}60$, soit 60 %.

Question 2.a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % de la proportion p de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.

La formule fournie donne l'intervalle $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \,;\, f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$. Avec $f = 0{,}6$ et $n = 90$, la marge d'erreur vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}6(1-0{,}6)}{90}} \approx 0{,}101214$. Les bornes, arrondies au millième, sont 0,499 et 0,701.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}499\,;\,0{,}701]$.

Question 2.b. **Peut-on être certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance ?**

Non. Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode sur un grand nombre de prélèvements réalisés dans les mêmes conditions : environ 95 % des intervalles ainsi obtenus contiennent la proportion inconnue. Il ne signifie pas que la proportion réelle a nécessairement 95 % de chances d'appartenir à l'intervalle particulier calculé à partir de cet échantillon.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le niveau de confiance de 95 % ne garantit pas que cet intervalle particulier contienne p.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est 3. Elle étudie la fermeture d'un tiroir et des situations liées à un magasin de vélos, en mobilisant équations différentielles, analyse, algorithmes, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ détermine les exponentielles de la solution générale.
- Un développement limité au voisinage de 0 donne la tangente via le terme affine et renseigne sur la position locale de la courbe via le terme d'ordre deux.
- Pour des événements E et V, $P(E \cap V) = P(E)P(V|E)$, et P(V) s'obtient en additionnant les probabilités des chemins menant à V.
- Si X suit une loi binomiale B(n,p), alors $P(X=k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Conserver les unités : f(t) est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, augmenter t de 0,1 et poursuivre tant que la condition indiquée reste vraie.
- Pour l'arbre, distinguer les probabilités des branches du premier niveau et les probabilités conditionnelles du second niveau.
- Un intervalle de confiance à 95 % n'assure pas avec certitude que la proportion inconnue y appartient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur le tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique associée pour obtenir les racines et la forme générale de la solution. Si nécessaire, on détermine ensuite les constantes avec les valeurs initiales de f(0) et f'(0).

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt de vélo aboutisse à une vente ?

On additionne les probabilités des chemins correspondant à une vente : vélo électrique et vente, puis vélo mécanique et vente. La probabilité de chaque chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et compte deux exercices de 10 points. Les parties de l'exercice 1 et les trois parties de l'exercice 2 peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet de changer de partie en cas de blocage.

Q : Quelles précisions d'arrondi et consignes de réponse faut-il respecter ?

Respectez les arrondis demandés, notamment à 10^{-3} pour les probabilités concernées et à 10^{-2} pour le tableau de l'algorithme. Pour les questions à choix multiples 4.b et 4.c, une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2023/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Metiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.