Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MAV, veuillez visiter :
btsmav.fr/annales-sujets-et-corriges

# Mathématiques

**Session 2022** • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

**1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical** (13 questions) **Page 3**

**2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d’une machine à embouteiller** (9 questions) **Page 7**

**3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

**Sujet officiel (PDF) :** https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2022/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

# 1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, on étudie le nombre de personnes équipées d'un implant médical à partir de données annuelles de 2013 à 2021. Deux modèles sont utilisés : un ajustement exponentiel et une fonction définie à l'aide d'une équation différentielle.

## Partie A

**Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.**

| Année | Rang k | $y = \ln(N - 30)$ |
|---|---|---|
| 2013 | 0 | 3,268 |
| 2014 | 1 | 3,336 |
| 2015 | 2 | 3,418 |
| 2016 | 3 | 3,497 |
| 2017 | 4 | 3,578 |
| 2018 | 5 | 3,656 |
| 2019 | 6 | 3,738 |
| 2020 | 7 | 3,818 |
| 2021 | 8 | 3,898 |

Pour chaque donnée, on calcule $\ln(N - 30)$, avec N en milliers, puis on arrondit au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y$ : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

**Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.**

La régression linéaire des neuf couples $(k_i ; y_i)$, pour $k_i = 0, \ldots, 8$, donne une pente d'environ 0,0794 et une ordonnée à l'origine d'environ 3,2606. Les deux coefficients sont arrondis au centième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 0,08k + 3,26$.

**Question 2.b.** **À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre N(k), en milliers, de personnes équipées de l'implant peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).**

Comme $y = \ln(N - 30)$, l'ajustement donne $N - 30 = e^{0,08k+3,26} = e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$. Ainsi, le modèle obtenu est celui annoncé, avec N en milliers de personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes.

**Question 3.a.** **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes qui devraient être équipées de l'implant en 2026.**

En 2026, le rang est $k = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,701$ milliers de personnes. On arrondit au millier près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 104 000 personnes.

**Question 3.b.** **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, indiquer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Quand $k$ tend vers $+\infty$, le terme $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc un nombre de personnes équipées qui dépasse à terme les 60 millions d'habitants du pays.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle tend vers l'infini et ne peut rester valide à long terme.

## Partie B

**Question 1.a.** **Résoudre sur [0 ; +∞[ l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0,05y = 0$ a pour solutions les fonctions exponentielles $y(x) = Ce^{-0,05x}$, où $C$ est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(x) = Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 1.b.** **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. On cherche une solution constante $y = c$, donc $y' = 0$.
2. L'équation impose $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(x) = 1$.

**Question 1.c.** **Résoudre sur [0 ; +∞[ l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution générale est la somme d'une solution particulière constante égale à 1 et des solutions de l'équation homogène associée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(x) = 1 + Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 1.d.** **Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

Dans la solution générale, la condition initiale donne $g(0) = 1 + C = 8$, donc $C = 7$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

**Question 2.** **La fonction f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)) modélise, en milliers, le nombre de personnes équipées de l'implant t années après 2013. Déterminer, selon ce modèle, au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

En 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Ainsi, $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,684$ milliers. L'arrondi au millier près est 97 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 97 000 personnes.

**Question 3.** **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Le dénominateur tend vers 1, donc $f(t) \to 450$. Comme f est exprimée en milliers, le modèle prévoit une limite de 450 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

---

**Question 4. À l'aide de l'expression f'(t) = 315e^(-0,05t)/[2(1 + 7e^(-0,05t))²], déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, le numérateur et le dénominateur de $f'(t)$ sont strictement positifs. Donc $f'(t) > 0$.

| t | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | + | |
| $f$ | croissante | |

Le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

---

**Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

1. Résoudre $f(t) > 120$ revient à obtenir $e^{-0,05t} < \dfrac{11}{28}$.
2. En prenant les logarithmes, $t > \dfrac{\ln(28/11)}{0,05} \approx 18,69$. Le premier rang entier possible est 19, soit l'année $2013 + 19 = 2032$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre de personnes équipées dépassera 120 000 à partir de 2032.

## 2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est approvisionnée en eau par un réservoir et en bouteilles vides par une file d'entrée. L'exercice étudie les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau embouteillé.

### Partie A - Défaut d'approvisionnement

**Question 1 à 4. Associer chaque phrase du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite, sans justification : 1) probabilité que la file d'entrée ne se vide pas dans la journée ; 2) événement où la file est vide au moins une fois mais pas le réservoir ; 3) probabilité que la file et le réservoir aient été vides au moins une fois dans la journée ; 4) probabilité d'un défaut d'approvisionnement dans la journée. Utiliser les choix proposés.**

On note A l'événement « la file est vide » et B l'événement « le réservoir est vide ». La première phrase correspond à l'événement contraire de A, donc à la probabilité $1 - 0{,}03 = 0{,}97$. La deuxième décrit $A \cap \bar{B}$. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$, et $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}049$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

### Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

**Question 1. Sur une période de 200 jours consécutifs, la probabilité d'une panne un jour quelconque est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours où la machine tombe en panne, et préciser ses paramètres.**

Chaque jour constitue une épreuve de Bernoulli : une panne est un succès, de probabilité 0,025. Les 200 jours sont indépendants et la probabilité de panne est identique chaque jour. La variable X compte donc le nombre de succès lors de 200 épreuves indépendantes. Elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}025$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale (200 ; 0,025).

**Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.**

Pour approcher une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de Poisson, on prend pour paramètre la moyenne np. Ici, le nombre de jours est $n = 200$ et la probabilité de panne chaque jour est $p = 0{,}025$. Ainsi, $\lambda = np = 200 \times 0{,}025 = 5$. C'est le paramètre de la loi de Poisson qui approche la loi de X.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

**Question 2.b.** **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à $10^{-3}$.**

Pour Y de loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités correspondant aux entiers k de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!}$. Cette somme vaut environ 0,9863047. En arrondissant au millième, on obtient 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(Y ≤ 10) ≈ 0,986.

**Question 2.c.** **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. En utilisant la formule fournie pour P(Y = k), indiquer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

Pour k = 15, la formule donne $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité est strictement positive. Sa valeur est très faible, environ 0,000157, ce qui explique que le graphique ne fasse pas apparaître de barre visible à k = 15. La lecture graphique ne signifie pas que la probabilité est exactement nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conjecture fausse : $P(Y = 15) \approx 0,000157 > 0$.

## Partie C - Qualité de l'embouteillement

**Question 1.** **À partir du tableau des volumes d'eau et des effectifs des 100 bouteilles, déterminer à l'aide de la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type $\sigma$ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à $10^{-2}$.**

| **Volume (cL)** | **73** | **74** | **75** | **76** | **77** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 17 | 20 | 43 | 13 | 7 |

La moyenne pondérée est $\bar{x} = 74,73$ cL. La variance calculée sur les 100 mesures vaut 1,2171 cL². L'écart type est donc $\sigma = \sqrt{1,2171} \approx 1,103$ cL, soit 1,10 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74,73$ cL et $\sigma \approx 1,10$ cL.

**Question 2.a.** **Pour le test bilatéral $H_0$ : m = 75 contre $H_1$ : m ≠ 75, au seuil de confiance de 95 %, l'écart type de Z sous $H_0$ est estimé à 0,11. Déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) ≈ 0,95, à $10^{-2}$ près.**

Sous $H_0$, Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Pour une probabilité centrale de 0,95, la valeur centrée réduite est environ 1,96. La demi-largeur recherchée vaut donc $h = 1,96 \times 0,11 = 0,2156$ cL. Arrondie au centième, elle est égale à 0,22 cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,22 cL.

**Question 2.b.** **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.**

La zone centrale de probabilité 0,95 sous $H_0$ est l'intervalle $[75 - h ; 75 + h]$, avec h arrondi à 0,22 cL. La décision se prend en comparant la moyenne observée de l'échantillon aux bornes de cet intervalle :

- si elle appartient à [74,78 ; 75,22], on ne rejette pas $H_0$ ;
- si elle est à l'extérieur, on rejette $H_0$ au seuil de 5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter $H_0$ si la moyenne est dans [74,78 ; 75,22] cL ; la rejeter sinon.

**Question 2.c.** **À partir des résultats de l'échantillon fourni, indiquer si l'hypothèse $H_0$ : m = 75 peut être acceptée.**

La moyenne de l'échantillon est 74,73 cL. La borne inférieure de l'intervalle d'acceptation est 74,78 cL. Comme 74,73 < 74,78, la moyenne observée n'appartient pas à l'intervalle d'acceptation défini pour le test bilatéral. Au seuil de 5 %, on rejette donc l'hypothèse $H_0$ selon laquelle la moyenne est égale à 75 cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non. On rejette $H_0$ au seuil de 5 %.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22-MATGRD1, durée 2 heures, avec coefficient variable selon la spécialité (1 à 2). Les deux exercices, notés chacun sur 10, portent sur la croissance de l'équipement en implant médical et le fonctionnement d'une embouteilleuse. Ils évaluent l'ajustement, les équations différentielles, les probabilités, la loi de Poisson, les statistiques descriptives et le test bilatéral.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement $y = \ln(N - 30)$ transforme le modèle exponentiel étudié en relation affine entre y et le rang k.
- Pour $y' + ay = b$, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Pour n essais de Bernoulli indépendants de probabilité p, le nombre de pannes suit B(n,p) et peut être approché par une loi de Poisson de paramètre np.
- Dans un test bilatéral à 95 %, la zone d'acceptation est un intervalle centré sur la moyenne sous $H_0$ et déterminé par les quantiles de la loi normale.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les nombres de personnes sont exprimés en milliers et le temps est compté en années depuis 2013.
- Appliquer les arrondis demandés : millième, centième, millier ou $10^{-2}$ selon la question.
- Distinguer l'intersection, le complémentaire et l'événement « au moins un » dans les calculs de probabilités.
- Pour le test, comparer la moyenne de l'échantillon à l'intervalle d'acceptation et ne pas la confondre avec la moyenne théorique m.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment utiliser le changement de variable y = ln(N - 30) ?**

Pour chaque valeur N, calculer d'abord N - 30, puis son logarithme népérien. Les couples (k,y) servent à déterminer la droite d'ajustement. On revient ensuite à N en exponentiant la relation affine obtenue.

**Q : Comment choisir le paramètre de l'approximation de Poisson ?**

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, le paramètre de l'approximation de Poisson est $\lambda = np$. Ici, $n = 200$ et $p = 0{,}025$, donc $\lambda = 5$.

**Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve ?**

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points. Répartir le temps entre les exercices, traiter les questions indépendantes sans attendre, puis garder quelques minutes pour vérifier unités, arrondis et résultats.

**Q : Comment conclure le test bilatéral au seuil de 95 % ?**

On accepte l'hypothèse nulle si la moyenne observée appartient à l'intervalle d'acceptation centré sur 75, défini par h. Sinon, on la rejette au seuil correspondant. La conclusion dépend des données et ne constitue pas une certitude absolue.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2022/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

**Ressources BTS Metiers de l\ :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.