Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MAV

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2022/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les trois parties étudient une équation différentielle, les variations et la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. Cette expression est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et donne toutes les solutions recherchées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche vaut donc bien le membre de droite pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$.
2. Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière les solutions de l'équation homogène (E_0), soit $ke^{-0,8t}$.

La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale s'écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$. On trouve alors $k = 15$, ce qui détermine la solution correspondant à la vitesse initiale du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Sachant que f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Quand t tend vers $+\infty$, $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel disparaît à la limite et le terme constant reste égal à 5. Cela établit la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une valeur finie lorsque $t \to +\infty$ possède une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite. Ici, la limite de $f(t)$ est 5. La courbe C se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 5 quand t augmente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ pour tout t de [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 à l'infini.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer, à partir de l'étude de la vitesse du chariot, si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout instant fini $t \geq 0$, le terme $15e^{-0,8t}$ est strictement positif. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais. Elle se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre zéro, donc le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Soit F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant l'expression de F, la dérivée de $e^{-0,8t}$ apporte le facteur $-0,8$: $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le coefficient du terme exponentiel vaut 15. On retrouve donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Une primitive de f est $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par conséquent, la distance cherchée vaut $F(1) - F(0)$. En évaluant aux deux bornes, on obtient $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. L'arrondi au centimètre s'effectue à deux décimales en mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les réponses proposées. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le développement limité fourni par le logiciel comporte les termes $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, la troisième conserve ces termes et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. C'est la forme correcte du reste à l'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. On lit $f(0) = 20$, et la dérivée donnée dans le sujet fournit $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

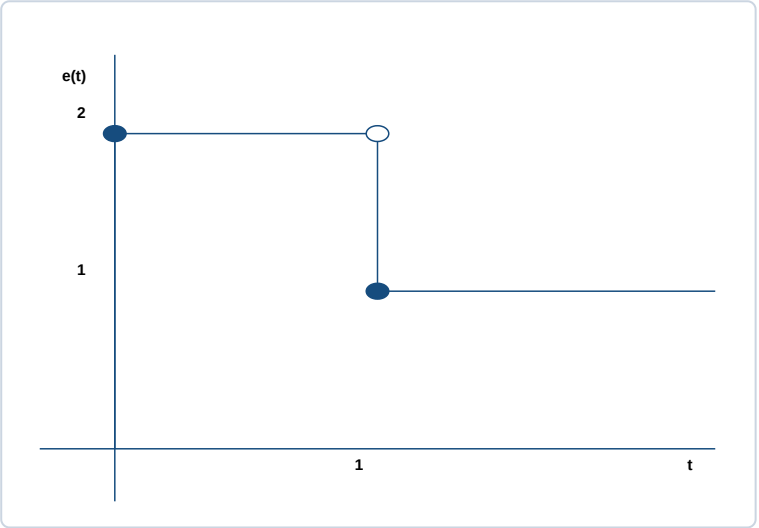
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice porte sur le tracé et la transformée du signal d'entrée, puis sur le calcul et l'étude du signal de sortie à l'aide des propriétés de Laplace.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Pour $t < 0$, le signal vaut 0. À partir de $t = 0$, $2U(t)$ le porte à 2 ; à $t = 1$, le terme $U(t - 1)$ vaut 1 et le signal descend à 1. Le tracé comporte donc un saut en chacun de ces instants. Les points pleins indiquent les valeurs effectivement prises aux instants de saut.

Signal d'entrée e(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Tracer les paliers : 0 avant 0, 2 de 0 inclus à 1 exclu, puis 1 à partir de 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité, on transforme séparément les deux échelons de $e(t) = 2U(t) - U(t - 1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et, pour un échelon retardé d'une unité, $\mathcal{L}\{U(t - 1)\} = e^{-p}/p$. On multiplie chaque transformée par son coefficient, puis on soustrait le second terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(p) = (2 - e^{-p})/p$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que $S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^{-p}$.

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. En remplaçant $H(p)$ par $1/(p + 1)$ et $E(p)$ par le résultat de la partie A, on obtient $S(p) = (2 - e^{-p})/[p(p + 1)]$. En séparant les termes du numérateur, on retrouve exactement l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)]$.

Question 2. Vérifier que $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Mettons les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Leur numérateur devient $(p + 1) - p$, qui vaut 1. Le dénominateur commun est $p(p + 1)$. On obtient ainsi le membre de gauche, pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de $1/p$, de $1/(p + 1)$, de e^{-p}/p et de $e^{-p}/(p + 1)$.

On reconnaît d'abord les transformées usuelles de l'échelon et de l'exponentielle décroissante. Pour les deux autres expressions, le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : on remplace alors t par $t - 1$ et on multiplie par $U(t - 1)$, ce qui annule le signal avant cet instant.

- $1/p$: $U(t)$.
- $1/(p + 1)$: $e^{-t}U(t)$.
- e^{-p}/p : $U(t - 1)$.
- $e^{-p}/(p + 1)$: $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t - 1)$, $e^{-(t - 1)}U(t - 1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

À partir de la décomposition précédente, l'inverse de $2/[p(p + 1)]$ est $2(1 - e^{-t})U(t)$. Le second terme contient le facteur de retard e^{-p} ; son inverse est nul pour $t < 1$. Sur l'intervalle demandé, seul le premier terme contribue, et $U(t) = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$: $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$ sur $[1 ; +\infty[$, calculer $s(1)$ et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

On utilise l'expression donnée pour $t \geq 1$ et on remplace t par 1 : $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$. Comme $e \cdot e^{-1} = 1$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. Sa valeur décimale est environ 1,264 ; arrondie au dixième, elle vaut 1,3.

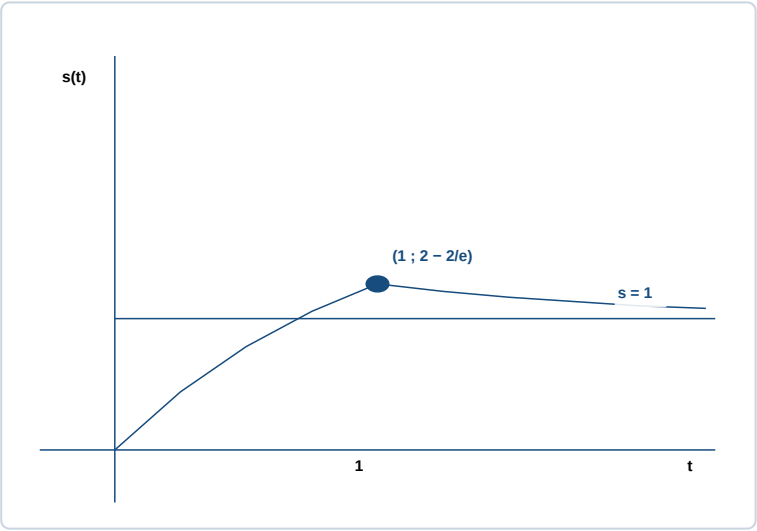
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

La courbe part de l'origine et suit $2(1 - e^{-t})$ jusqu'à $t = 1$. Elle atteint alors $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit l'expression donnée dans l'énoncé et décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$: le raccord est continu. L'asymptote horizontale est $s = 1$.

Courbe représentative de s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe continue de $(0 ; 0)$ à $(1 ; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression est $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers +∞, le terme exponentiel tend vers zéro. Le terme constant 1 reste donc seul dans la limite. La courbe se rapproche ainsi de l'asymptote horizontale d'équation $s = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- Le retard d'une unité vérifie $\mathcal{L}\{f(t-1)U(t-1)\} = e^{-p}F(p)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : vitesse en $m \cdot s^{-1}$, temps en secondes et distance en mètres.
- Pour l'équation différentielle, vérifier la solution particulière puis appliquer la condition initiale f(0) = 20.
- Justifier le signe de la dérivée et distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'un arrêt atteint à un instant fini.
- Pour les signaux retardés, utiliser le facteur e^{-p} et respecter le changement de définition au temps t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante de l'équation complète. Utilisez ensuite la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante restante.

Q : Comment savoir si le chariot finit par s'arrêter ?

Étudiez la vitesse et vérifiez si elle atteint zéro à un instant fini. Ici, elle tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ et reste positive selon le modèle : le chariot ne s'arrête donc pas.

Q : Comment organiser le travail pendant les deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les trois parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices et gardez une marge pour les calculs, les tracés et la vérification.

Q : Faut-il justifier le choix de la réponse au développement limité ?

Non, la question à choix multiples précise qu'aucune justification n'est demandée. Pour les autres questions, répondez à la consigne, notamment en donnant les valeurs exactes et les arrondis demandés et en réalisant les tracés sur le document-réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2022/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Metiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.