Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MAV

Épreuve de mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2022/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction définie par une équation différentielle. L'étude mobilise la résolution de cette équation, l'analyse de la fonction vitesse, le calcul d'une distance parcourue, un développement limité et l'équation d'une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

Pour une équation différentielle homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. En remplaçant a par sa valeur, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$. La constante C est arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie par g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Ce résultat est égal au membre de droite de l'équation. La vérification vaut pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $g(t) = 5$ vérifie bien l'équation (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l'équation homogène associée sont $Ce^{-0,8t}$. La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant cette solution particulière à chaque solution de l'équation homogène. La constante réelle reste arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, pour $C \in \mathbb{R}$, donne toutes les solutions de (E).

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$. En utilisant la condition initiale, $f(0) = 5 + C = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 20 - 5 = 15$. Cette valeur donne la solution qui respecte à la fois l'équation différentielle et la vitesse initiale du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On sait que $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers 0. Il ne reste que le terme constant 5 dans la limite de $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de la vitesse lorsque $t \to +\infty$ est $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par le théorème sur les limites finies en l'infini, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses et se situe au niveau de la vitesse limite du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 15 + 5 = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $15e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ à tout instant. La vitesse diminue et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, mais elle ne s'annule pas. Selon ce modèle, le chariot ne s'arrête donc pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et le chariot ne s'arrête pas.

Question 4. a. **Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut $18,75 \times 0,8 = 15$, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. C'est exactement l'expression de $f(t)$, ce qui confirme que F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de l'intégrale de f, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1 seconde : $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant les bornes, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette expression est la valeur exacte. Son évaluation donne environ $15,3251$ mètres, soit un arrondi au centimètre de $15,33$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance exacte est $23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie, sans justification. Une seule réponse est attendue.**

Réponse à recopier sans justification, conformément à l'énoncé : la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On a $f(0) = 20$ et, avec la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et sa pente est -12. En remplaçant ces valeurs dans l'équation, on obtient son expression.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 est $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la conformité des rivets

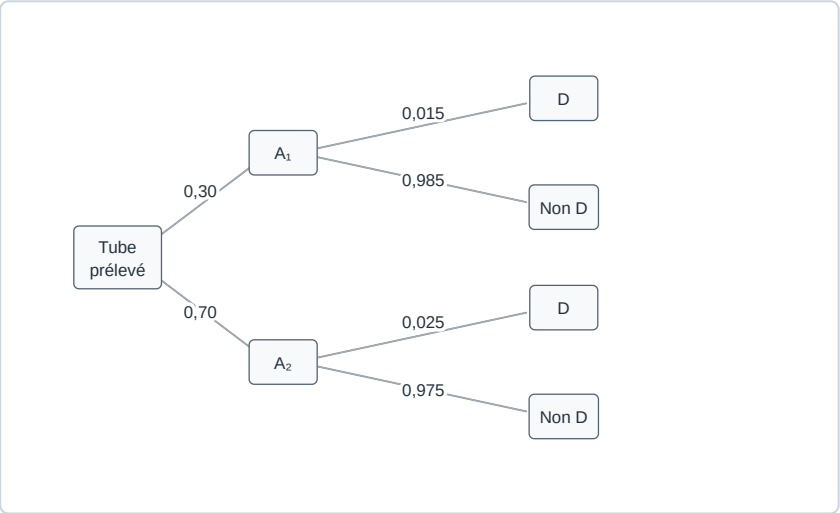
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle leur conformité en recherchant les défauts. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de vie des tubes modélisée par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production et des taux de défaut des deux ateliers, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

Le premier niveau de l'arbre représente les parts de production : 30 % pour l'atelier 1 et 70 % pour l'atelier 2. Depuis chaque atelier, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités conditionnelles sont respectivement 0,015 et 0,025 pour un défaut ; leurs compléments valent 0,985 et 0,975.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Depuis chaque nœud, la somme des probabilités des branches vaut 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : A_1 (0,30), A_2 (0,70) ; depuis A_1 : D (0,015), non D (0,985) ; depuis A_2 : D (0,025), non D (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

On multiplie la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 par le taux de défaut de cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1)$. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Cette probabilité correspond aux tubes défectueux issus de l'atelier 1 rapportés à toute la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\%$.

Question 3. **Déterminer la probabilité qu'un tube choisi au hasard dans la production totale présente un défaut.**

Un tube défectueux peut provenir de l'un ou l'autre des deux ateliers. Les deux événements étant incompatibles, on additionne les probabilités des deux chemins de l'arbre : $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$. Le résultat est une moyenne pondérée des taux de défaut par les parts de production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit $2{,}2\%$.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle sachant que le tube n'a pas de défaut. La probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut vaut $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité de ne pas avoir de défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. On divise donc la première valeur par la seconde.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit $69{,}8\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **Déterminer l'espérance E(T) de la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent, puis interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$, la formule donnée est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E(T) = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Cette espérance désigne la durée moyenne de bon fonctionnement sur un grand nombre de tubes ; elle ne garantit pas que chaque tube fonctionne exactement 1 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé fonctionne moins de 8 000 heures.**

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour $t = 8\,000$ et $\lambda = 0{,}001$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$. La loi étant continue, les probabilités avec $<$ et $\leq$ sont identiques.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

À 10^{-2} près, $P(T < 8\,000) = 1{,}00$.

Question 3. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé fonctionne plus de 10 000 heures.**

La probabilité de fonctionner plus de t heures est la probabilité de survie : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Arrondie au centième demandé, cette probabilité est nulle.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

À 10^{-2} près, $P(T > 10\,000) = 0{,}00$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 975 rivets conformes observés parmi les 1 000 rivets de l'échantillon, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée de rivets conformes dans l'échantillon. On compte 975 rivets conformes parmi 1 000 rivets, donc $\hat{p} = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence observée représente 97,5 % de l'échantillon.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\hat{p} = 0{,}975$, soit $97{,}5\%$.

Question 2. **Déterminer, à l'aide de la formule fournie, un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p de rivets conformes, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

La formule de l'énoncé s'applique avec la fréquence $f = 0{,}975$ et l'effectif $n = 1\,000$: $\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$. Les bornes obtenues sont environ $0{,}965323$ et $0{,}984677$, puis sont arrondies au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, ou 3 pour la spécialité Traitement des matériaux. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la qualité de produits industriels. Les compétences évaluées portent sur les équations différentielles, l'analyse, les probabilités, la loi exponentielle et l'estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = b, avec a non nul et b constant, s'écrivent y(t) = Ce^(-at) + b/a.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance fourni pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Résoudre d'abord l'équation homogène, puis trouver une solution particulière avant d'appliquer la condition initiale.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, examiner si sa vitesse atteint zéro ou tend vers une limite strictement positive.
- En probabilité conditionnelle, identifier l'événement conditionnant et utiliser la probabilité correspondante au dénominateur.
- Respecter le sens des inégalités, les unités demandées et la précision d'arrondi indiquée pour chaque résultat.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante de l'équation complète. Utilisez ensuite la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer une probabilité de durée de vie avec la loi exponentielle ?

Avec le paramètre λ = 0,001, utilisez P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) pour une durée inférieure à t. Pour une durée supérieure à t, prenez le complément, soit e^(-λt).

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Le sujet ne précise pas de répartition des points entre les questions, il ne faut donc pas supposer de sous-barème.

Q : Quelle formule et quel arrondi faut-il utiliser pour l'intervalle de confiance ?

Utilisez la formule fournie : f ± 1,96√(f(1-f)/n), avec f = 975/1 000 et n = 1 000. Arrondissez les deux bornes finales à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmav.fr/assets/annales/bts-mav/E2 - Mathématiques/2022/BTS MAV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Metiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.